MATEMATIKA 2

PMF

1. travnja 2014.

Definicija

Skup $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *(n-terostruki Kartezijev produkt skupa realnih brojeva sa samim sobom), odnosno*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$$

zovemo n-dimenzionalni Euklidski prostor, a uređene n-torke su točke tog prostora.

Funkcije više varijabli

Definicija

Skup $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *(n-terostruki Kartezijev produkt skupa realnih brojeva sa samim sobom), odnosno*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$$

zovemo n-dimenzionalni Euklidski prostor, a uređene n-torke su točke tog prostora. Preslikavanje $f : D \to \mathbb{R}$*, gdje je* $D \subseteq \mathbb{R}^n$*, koje svakoj točki iz područja definicije* D *pridružuje realni broj zovemo* **realna** *(ili* **skalarna***)* **funkcija od n realnih varijabli**.

Funkcije više varijabli

Definicija

Skup $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *(n-terostruki Kartezijev produkt skupa realnih brojeva sa samim sobom), odnosno*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$$

zovemo n-dimenzionalni Euklidski prostor, a uređene n-torke su točke tog prostora. Preslikavanje $f : D \to \mathbb{R}$, *gdje je* $D \subseteq \mathbb{R}^n$, *koje svakoj točki iz područja definicije* D *pridružuje realni broj zovemo* **realna** *(ili* **skalarna***)* **funkcija od n realnih varijabli**. *Koristimo oznaku* $T \mapsto f(T)$ *za* $T \in D$ *ili*

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n),\ \text{za}\ (x_1, \ldots, x_n) \in D.$$

Definicija

Skup $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *(n-terostruki Kartezijev produkt skupa realnih brojeva sa samim sobom), odnosno*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$$

zovemo n-dimenzionalni Euklidski prostor, a uređene n-torke su točke tog prostora. Preslikavanje $f : D \to \mathbb{R}$*, gdje je* $D \subseteq \mathbb{R}^n$*, koje svakoj točki iz područja definicije* D *pridružuje realni broj zovemo* **realna** *(ili* **skalarna***)* **funkcija od n realnih varijabli**. *Koristimo oznaku* $T \mapsto f(T)$ *za* $T \in D$ *ili*

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n),\ \textit{za}\ (x_1, \ldots, x_n) \in D.$$

Skalarnu funkciju možemo zadati **analitički, tablično, grafički** (kada je $n = 2$), **parametarski, implicitno**, ...

Funkcije dviju varijabli

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo **funkcijom dviju varijabli**.

$$(x, y) \in D \xrightarrow{f} z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Funkcije dviju varijabli

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo **funkcijom dviju varijabli**.

$$(x, y) \in D \xrightarrow{f} z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{z \,|\, z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ - slika funkcije

Funkcije dviju varijabli

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo **funkcijom dviju varijabli**.

$$(x, y) \in D \xrightarrow{f} z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{z \,|\, z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ - slika funkcije
- x, y - nezavisne varijable

Funkcije dviju varijabli

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^2$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazivamo **funkcijom dviju varijabli**.

$$(x, y) \in D \xrightarrow{f} z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{z \,|\, z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ - slika funkcije
- x, y - nezavisne varijable
- z - zavisna vrijabla

Funkciju obično zadajemo u eksplicitnom obliku

$$z = f(x, y).$$

Funkcije dviju varijabli

Funkciju obično zadajemo u eksplicitnom obliku

$$z = f(x, y).$$

Budući da, u tom slučaju, nije naznačena domena, podrazumijevamo da je domena maksimalan podskup D_f od $\mathbb{R}^2$ za koji pravilo f "ima smisla".

Funkcije dviju varijabli

Funkciju obično zadajemo u eksplicitnom obliku

$$z = f(x, y).$$

Budući da, u tom slučaju, nije naznačena domena, podrazumijevamo da je domena maksimalan podskup D_f od $\mathbb{R}^2$ za koji pravilo f "ima smisla".

Definicija

Skup

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \,|(x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

nazivamo **graf funkcije** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Funkcije dviju varijabli

Funkciju obično zadajemo u eksplicitnom obliku

$$z = f(x, y).$$

Budući da, u tom slučaju, nije naznačena domena, podrazumijevamo da je domena maksimalan podskup D_f od $\mathbb{R}^2$ za koji pravilo f "ima smisla".

Definicija

Skup

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \,|\, (x, y) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

nazivamo **graf funkcije** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Graf u prostoru predstavlja neku plohu.

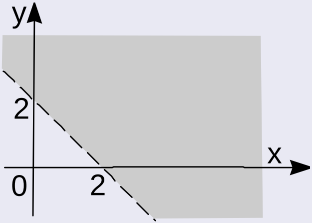
Primjer

Zapis $z = \ln(x + y - 2)$ *definira funkciju*

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \ln(x + y - 2),$$

pri čemu je definicijsko područje D_f *određeno nejednadžbom* $x + y - 2 > 0$*, tj.*

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x + 2\}$$



Funkcije triju varijabli

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^3$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, nazivamo **funkcijom triju varijabli**.

$$(x, y, z) \in D \xrightarrow{f} u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

Funkcije triju varijabli

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^3$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, nazivamo **funkcijom triju varijabli**.

$$(x, y, z) \in D \xrightarrow{f} u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{u \,|\, u = f(x, y, z),\ (x, y, z) \in D\}$ - slika funkcije

Funkcije triju varijabli

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^3$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, nazivamo **funkcijom triju varijabli**.

$$(x, y, z) \in D \xrightarrow{f} u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{u \,|\, u = f(x, y, z),\ (x, y, z) \in D\}$ - slika funkcije
- x, y, z - nezavisne varijable

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^3$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, nazivamo **funkcijom triju varijabli**.

$$(x, y, z) \in D \xrightarrow{f} u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{u \,|\, u = f(x, y, z),\ (x, y, z) \in D\}$ - slika funkcije
- x, y, z - nezavisne varijable
- u - zavisna vrijabla

Funkcije triju varijabli

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^3$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, nazivamo **funkcijom triju varijabli**.

$$(x, y, z) \in D \xrightarrow{f} u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{u \,|\, u = f(x, y, z),\ (x, y, z) \in D\}$ - slika funkcije
- x, y, z - nezavisne varijable
- u - zavisna vrijabla
- $u = f(x, y, z)$ - eksplicitni oblik (domena D_f - maksimalan podskup od $\mathbb{R}^3$ za koji pravilo f ima smisla)

Funkcije triju varijabli

Ako je $D \subseteq \mathbb{R}^3$, funkciju $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, nazivamo **funkcijom triju varijabli**.

$$(x, y, z) \in D \xrightarrow{f} u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$$

- $f[D] = \{u \,|\, u = f(x, y, z),\ (x, y, z) \in D\}$ - slika funkcije
- x, y, z - nezavisne varijable
- u - zavisna vrijabla
- $u = f(x, y, z)$ - eksplicitni oblik (domena D_f - maksimalan podskup od $\mathbb{R}^3$ za koji pravilo f ima smisla)
- graf funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je

$$\Gamma_f = \{(x, y, z, f(x, y, z)) \,|\, (x, y, z) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(ne možemo nacrtati)

Funkcije triju varijabli

Primjer

Pravilo $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ *definira funkciju*

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ \ D_f \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2),$$

pri čemu je definicijsko područje D_f *određeno nejednadžbama*
$-1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 2 \leq 1.$

Primjer

Pravilo $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ *definira funkciju*

$$f : D_f \to \mathbb{R},\; D_f \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2),$$

pri čemu je definicijsko područje D_f *određeno nejednadžbama* $-1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 2 \leq 1$. *Dakle,*

$$D_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\right\}.$$

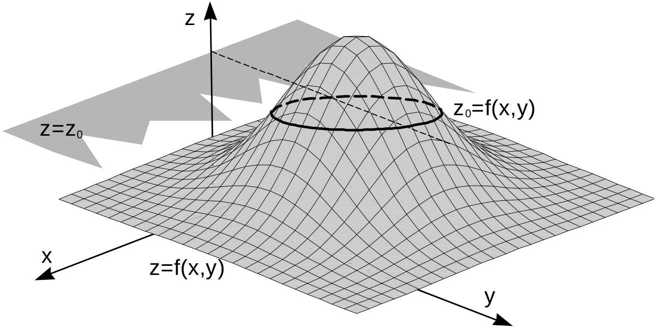
Graf

Graf Γ_f funkcije moguće je nacrtati (djelomično) samo za $n \leq 2$.

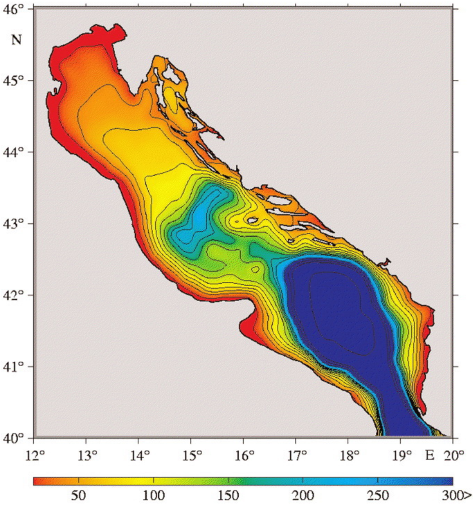
Graf

Graf Γ_f funkcije moguće je nacrtati (djelomično) samo za $n \leq 2$.
U slučaju $n = 2$ crtanjem ističemo samo neke njegove važne podskupove.
To su, najčešće, presjeci Γ_f odabranim ravninama u prostoru $\mathbb{R}^3$. Ako su te ravnine usporedne s ravninom $z = 0$ (koordinatnom xy-ravninom), dobivene presjeke nazivamo **razinskim krivuljama** funkcije f (ili grafa Γ_f).

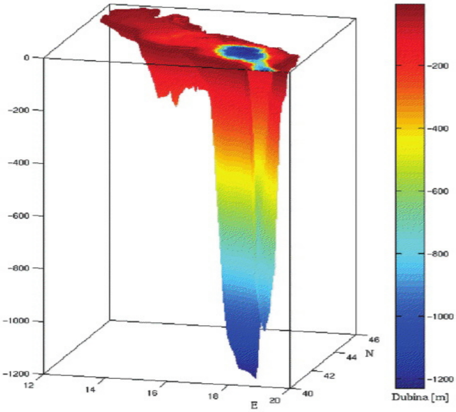
Graf Γ_f funkcije moguće je nacrtati (djelomično) samo za $n \leq 2$.
U slučaju $n = 2$ crtanjem ističemo samo neke njegove važne podskupove.
To su, najčešće, presjeci Γ_f odabranim ravninama u prostoru $\mathbb{R}^3$. Ako su te ravnine usporedne s ravninom $z = 0$ (koordinatnom xy-ravninom), dobivene presjeke nazivamo **razinskim krivuljama** funkcije f (ili grafa Γ_f).
Po tomu, svaki broj $z_0 \in f[D]$ određuje jednu razinsku krivulju jednadžbom $f(x, y) = z_0$.



Razinske krivulje



Graf



0
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
12
14
16
18
20
E
40
42
44
46
N
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
Dubina [m]

Primjer

Funkcijski graf G_f *za funkciju*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

crtamo ističući njegove presjeke s koordinatnim ravninama ili njima paralelnim ravninama:

- *ravninom* $x=0$ *(to su zrake:* $z=y$, $z\geq 0$, $x=0$ *te* $z=-y$, $z\geq 0$, $x=0$*)*

Primjer

Funkcijski graf G_f za funkciju

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

crtamo ističući njegove presjeke s koordinatnim ravninama ili njima paralelnim ravninama:

- *ravninom* $x = 0$ *(to su zrake:* $z = y$, $z \geq 0$, $x = 0$ *te* $z = -y$, $z \geq 0$, $x = 0$*)*
- *ravninom* $y = 0$ *(to su zrake:* $z = x$, $z \geq 0$, $y = 0$ *te* $z = -x$, $z \geq 0$, $y = 0$*)*

Primjer

Funkcijski graf G_f za funkciju

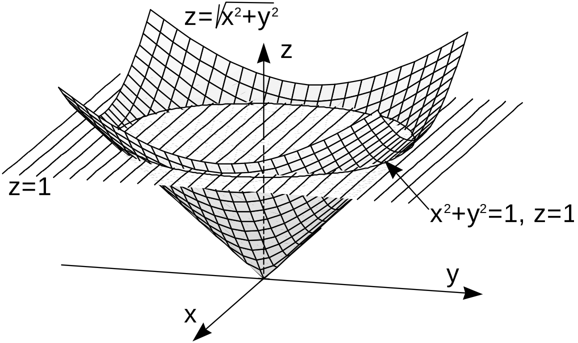
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

crtamo ističući njegove presjeke s koordinatnim ravninama ili njima paralelnim ravninama:

- *ravninom* $x = 0$ *(to su zrake:* $z = y$, $z \geq 0$, $x = 0$ *te* $z = -y$, $z \geq 0$, $x = 0$*)*
- *ravninom* $y = 0$ *(to su zrake:* $z = x$, $z \geq 0$, $y = 0$ *te* $z = -x$, $z \geq 0$, $y = 0$*)*
- *ravninom* $z = 1$ *(to je razinska krivulja (kružnica)* $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$*)*

Graf

Primijetimo da je G_f stožasta ploha



Graf

Slično se u slučaju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, dakle $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^4$, govori o **razinskim plohama** (ili **nivo-plohama**) funkcije f.

Graf

Slično se u slučaju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, dakle $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^4$, govori o **razinskim plohama** (ili **nivo-plohama**) funkcije f. Pritom svaka jednadžba

$$f(x, y, z) = u_0, \quad \text{za konstantu } u_0 \in f[D],$$

određuje točno jednu pripadnu razinsku plohu na kojoj su sve funkcijske vrijednosti jednake u_0.

Graf

Slično se u slučaju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$, dakle $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^4$, govori o **razinskim plohama** (ili **nivo-plohama**) funkcije f. Pritom svaka jednadžba

$$f(x, y, z) = u_0, \quad \text{za konstantu } u_0 \in f[D],$$

određuje točno jednu pripadnu razinsku plohu na kojoj su sve funkcijske vrijednosti jednake u_0.

Primjer

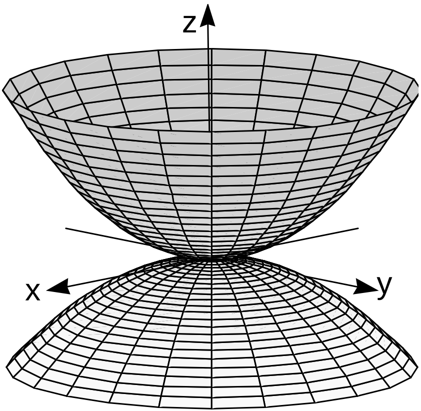
Razinske plohe za funkciju

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid z = 0\},$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z},$$

su paraboloidi (bez "tjemena") $z = \frac{1}{u_0}\left(x^2 + y^2\right)$, $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Graf



Omeđenost i monotonost

Definicija

Neka je zadana $f : D \to \mathbb{R}$. *Ako svim varijablama osim jedne, recimo* x_i, *pridružimo konkretne vrijednosti*

$$x_1 = a_1, \ldots, x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \ldots, x_n = a_n,$$

onda možemo definirati funkciju jedne varijable $f_i : D_i \to \mathbb{R}$, $D_i \subseteq \mathbb{R}$ *formulom*

$$f_i\left(x\right) = f\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n\right).$$

Omeđenost i monotonost

Definicija

Neka je zadana $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. *Ako svim varijablama osim jedne, recimo* x_i, *pridružimo konkretne vrijednosti*

$$x_1 = a_1, \ldots, x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \ldots, x_n = a_n,$$

onda možemo definirati funkciju jedne varijable $f_i : D_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_i \subseteq \mathbb{R}$ *formulom*

$$f_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Kažemo da je funkcija f **rastuća** *(***strogo rastuća**, **padajuća**, **strogo padajuća***) s obzirom na varijablu* x_i *za* $x_1 = a_1, \ldots, x_{i-1} = a_{i-1}, x_{i+1} = a_{i+1}, \ldots, x_n = a_n$, *ako je funkcija* f_i *takva.*

Omeđenost i monotonost

Definicija

Funkcija f *je* **omeđena** *ako postoji* $M > 0$ *takav da je*

$$|f(T)| \leq M, \quad \forall T \in \mathcal{D}.$$

Omeđenost i monotonost

Definicija

Funkcija f *je* **omeđena** *ako postoji* $M > 0$ *takav da je*

$$|f(T)| \leq M, \quad \forall T \in \mathcal{D}.$$

Primjer

Neka je $z = f(x, y) = 2x^3 - y^2$ *i neka je zadana točka* $T = (1, 3)$. *Tada je funkcija* $f_1(x) = f(x, 3) = 2x^3 - 9$ *strogo rastuća na čitavom* $\mathbb{R}$, *dok je funkcija* $f_2(y) = f(1, y) = 2 - y^2$ *strogo rastuća za* $y \leq 0$ *i strogo padajuća za* $y > 0$.

Limes

Najprije treba definirati što u $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) znači "**biti blizu**", tj. što će biti "**mala okolina**" po volji odabrane točke.

Limes

Najprije treba definirati što u $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$ znači "**biti blizu**", tj. što će biti "**mala okolina**" po volji odabrane točke.

Definicija

Neka su $T_1 = (x_1, \ldots, x_n)$ *i* $T_2 = (y_1, \ldots, y_n)$ *dvije točke iz* $\mathbb{R}^n$. *Njihovu* **udaljenost** *definiramo kao*

$$d\,(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Limes

Najprije treba definirati što u $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$ znači "**biti blizu**", tj. što će biti "**mala okolina**" po volji odabrane točke.

Definicija

Neka su $T_1 = (x_1, \ldots, x_n)$ *i* $T_2 = (y_1, \ldots, y_n)$ *dvije točke iz* $\mathbb{R}^n$. *Njihovu* **udaljenost** *definiramo kao*

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Skup

$$K(T, \delta) = \{S \in \mathbb{R}^n : d(T, S) < \delta\}$$

svih točaka prostora $\mathbb{R}^n$ *koje su od točke* T *udaljene za manje od* δ *nazivamo* **otvorena kugla** *radijusa* δ *ili* δ-**okolina** *točke* T.

Limes

Napomena

Formula za udaljenost je poopćenje formula za udaljenost u $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ *i* $\mathbb{R}^3$. *Za* $n = 1$ *kugla* $K(T, \delta)$ *je otvoreni interval* $(T - \delta, T + \delta)$ *oko točke* T, *za* $n = 2$ *to je krug radijusa* δ *oko* T *(bez ruba), a za* $n = 3$ *kugla radijusa* δ *oko* T *(opet bez ruba).*

Limes

Napomena

Formula za udaljenost je poopćenje formula za udaljenost u $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ *i* $\mathbb{R}^3$. *Za* $n = 1$ *kugla* $K(T, \delta)$ *je otvoreni interval* $(T - \delta, T + \delta)$ *oko točke* T, *za* $n = 2$ *to je krug radijusa* δ *oko* T *(bez ruba), a za* $n = 3$ *kugla radijusa* δ *oko* T *(opet bez ruba).*

Definicija

Neka su zadane funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ *i točka* $T_0 \in D$ *takva da za svaku* δ*-okolinu od* T_0 *vrijedi*

$$K(T_0, \delta) \cap D \setminus \{T_0\} \neq \emptyset.$$

Kažemo da je $a \in \mathbb{R}$ **granična vrijednost** *ili* **limes** *funkcije* f *u točki* T_0 *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\; T \in K(T_0, \delta) \setminus \{T_0\} \Rightarrow |f(T) - a| < \varepsilon.$$

Limes

Pišemo
$$\lim_{T \to T_0} f\left(T\right) = a.$$

Limes

Pišemo

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = a.$$

Primjer

Pokažimo da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Limes

Pišemo

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = a.$$

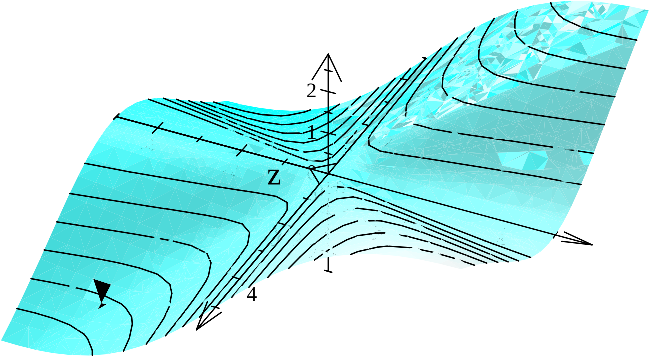
Primjer

Pokažimo da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

Zbog $x^2 + y^2 \geq 2\,|xy|$ *imamo:*

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2 y}{2xy}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x}{2}\right| = 0.$$



$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

Limes

Napomena

Kod funkcija jedne varijable smo imali

$$\lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

$$\lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \textit{ne postoji.}$$

Limes

Napomena

Kod funkcija jedne varijable smo imali

$$\lim_{x\to x_0^{+0}} f(x) = \lim_{x\to x_0^{-0}} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

$$\lim_{x\to x_0^{+0}} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^{-0}} f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \quad \textit{ne postoji.}$$

Ovdje je situacija složenija. Puteva kako "ići" u (x_0, y_0) *ima beskonačno. No, jasno je da limes ne smije ovisiti o putanji.*

Puno je lakše utvrditi da limes **ne** postoji, nego da postoji!

Limes po krivulji

Puno je lakše utvrditi da limes **ne** postoji, nego da postoji!

Napomena

Neka su c_1 *i* c_2 *dvije krivulje u* D_f *koje sadrže točku* (x_0, y_0). *Ako je*

$$\lim_{(x,y)\underset{c_1}{\to}(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1 \qquad i \qquad \lim_{(x,y)\underset{c_2}{\to}(x_0,y_0)} f(x,y) = L_2$$

te $L_1 \neq L_2$, *onda* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ *ne postoji.*

Limes po krivulji

Primjer

Odredite limes funkcije f u točki $(0, 0)$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Primjer

Odredite limes funkcije f *u točki* $(0,0)$

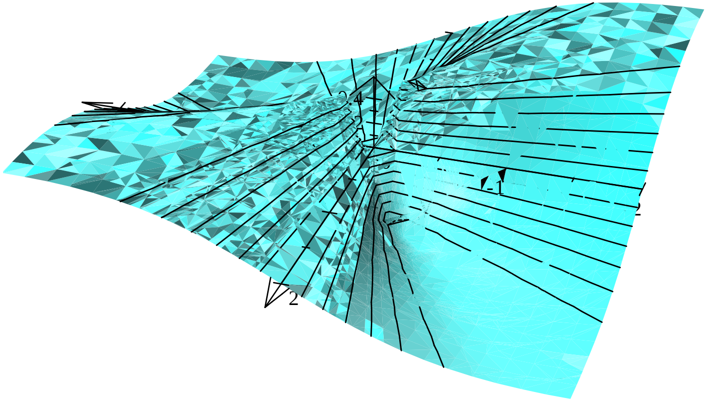
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

Ukoliko $(x,y)\to(0,0)$ *ide po putevima koje određuju pravci* $y=kx$ *imamo*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

i traženi limes ne postoji jer za različite k *dobijamo različite vrijednosti.*

Limes po krivulji



$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Primjer

Odredite limes funkcije

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2},$$

u točki $(0,0)$.

Primjer

Odredite limes funkcije

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2},$$

u točki $(0,0)$.

Ako $(x,y) \to (0,0)$ *ide putevima koje određuju pravci* $y = kx$ *imamo*

Limes po krivulji

Primjer

Odredite limes funkcije

$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2},$$

u točki $(0,0)$.
Ako $(x,y)\to(0,0)$ *ide putevima koje određuju pravci* $y=kx$ *imamo*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2+k^2x^2\right)}{x^2+k^2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left[x^2\left(1+k^2\right)\right]}{x^2\left(1+k^2\right)}=1,$$

što još ne znači da limes postoji!

Primjer

Zadatak se može riješiti i prelaskom na polarne koordinate.

Primjer

Zadatak se može riješiti i prelaskom na polarne koordinate.
Budući je

$$x = \rho \cos \varphi \ \textit{i} \ y = \rho \sin \varphi,$$

onda

$$(x, y) \to (0, 0) \ \textit{ako i samo ako} \ \rho \to 0.$$

Polarne koordinate

Primjer

Zadatak se može riješiti i prelaskom na polarne koordinate.
Budući je

$$x = \rho \cos \varphi \text{ i } y = \rho \sin \varphi,$$

onda

$$(x, y) \to (0, 0) \text{ ako i samo ako } \rho \to 0.$$

Imamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} = 1.$$

Polarne koordinate

Primjer

Zadatak se može riješiti i prelaskom na polarne koordinate.
Budući je

$$x = \rho \cos \varphi \text{ i } y = \rho \sin \varphi,$$

onda

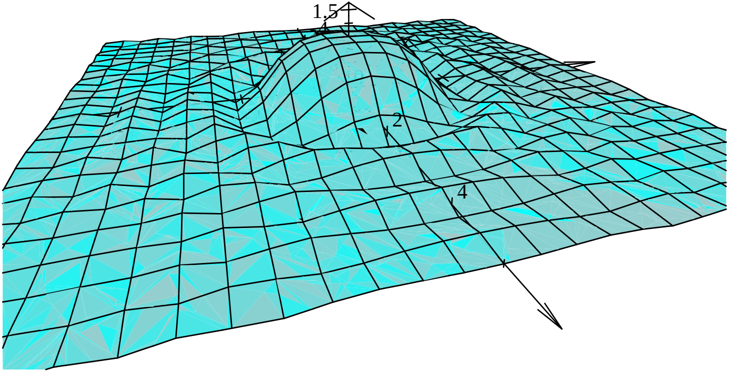
$$(x, y) \to (0, 0) \text{ ako i samo ako } \rho \to 0.$$

Imamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\sin \rho^2}{\rho^2} = 1.$$

Budući da dobiveni rezultat ne ovisi o kutu φ, tj. ne ovisi o krivulji po kojoj dolazimo u točku $(0, 0)$, zaključujemo da limes postoji i da je jednak 1.

Limes po krivulji



$$f(x,y) = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$$

Uzastopni limesi

Teorem (o uzastopnim limesima)

Neka je

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Ako postoje uzastopni limesi

$$L_1 = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \quad i \quad L_2 = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right),$$

onda je $L_1 = L_2 = L$.

Uzastopni limesi

Teorem (o uzastopnim limesima)

Neka je

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Ako postoje uzastopni limesi

$$L_1 = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \quad i \quad L_2 = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right),$$

onda je $L_1 = L_2 = L$.

Obrat tvrdnje iz ovog teorema općenito ne vrijedi, jer postojanje i jednakost uzastopnih limesa znači samo postojanje i jednakost limesa po dva od beskonačno mnogo putova približavanja točki (x_0, y_0).

Uzastopni limesi

Teorem (o uzastopnim limesima)

Neka je

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Ako postoje uzastopni limesi

$$L_1 = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \quad i \quad L_2 = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right),$$

onda je $L_1 = L_2 = L$.

Obrat tvrdnje iz ovog teorema općenito ne vrijedi, jer postojanje i jednakost uzastopnih limesa znači samo postojanje i jednakost limesa po dva od beskonačno mnogo putova približavanja točki (x_0, y_0).
No, ako postoje uzastopni limesi L_1 i L_2 i vrijedi $L_1 \neq L_2$ ili ako jedan od njih ne postoji, onda ne postoji ni limes L.

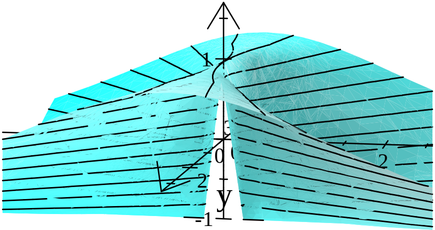
Uzastopni limesi

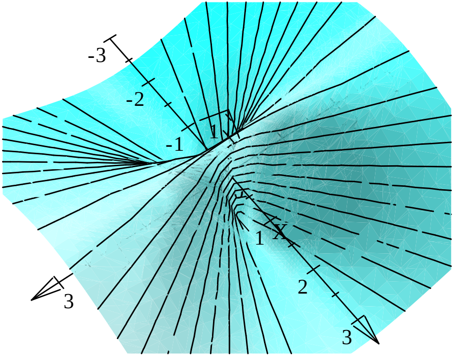
Primjer

Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, *nema limes u točki* $(0,0)$, *jer je*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1,\\
\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) &= \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1.
\end{aligned}
$$

Uzastopni limesi





$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Uzastopni limesi

Primjer

Za funkciju

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

imamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

i

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

ali ranije smo vidjeli da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *ne postoji.*

Limes preko nizova

Teorem

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

Limes preko nizova

Teorem

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $\lim\limits_{T \to T_0} f(T) = a,$

Limes preko nizova

Teorem

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $\lim\limits_{T \to T_0} f(T) = a$,

(ii) *za svaki niz točaka* $(T_k \in D_f \setminus \{T_0\}, k \in \mathbb{N})$ *koji konvergira prema točki* T_0, *pripadajući niz funkcijskih vrijednosti* $(f(T_k), k \in \mathbb{N})$ *konvergira prema broju* a.

Limes preko nizova

Teorem

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $\lim\limits_{T \to T_0} f(T) = a$,

(ii) *za svaki niz točaka* $(T_k \in D_f \setminus \{T_0\}, k \in \mathbb{N})$ *koji konvergira prema točki* T_0, *pripadajući niz funkcijskih vrijednosti* $(f(T_k), k \in \mathbb{N})$ *konvergira prema broju* a.

Ovaj teorem je također nezgodan za dokazivanje postojanja limesa (jer treba provjeriti beskonačno mnogo različitih nizova).

Limes preko nizova

Teorem

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) $\lim\limits_{T \to T_0} f(T) = a$,

(ii) *za svaki niz točaka* $(T_k \in D_f \setminus \{T_0\}, k \in \mathbb{N})$ *koji konvergira prema točki* T_0, *pripadajući niz funkcijskih vrijednosti* $(f(T_k), k \in \mathbb{N})$ *konvergira prema broju* a.

Ovaj teorem je također nezgodan za dokazivanje postojanja limesa (jer treba provjeriti beskonačno mnogo različitih nizova).
Koristimo ga kad želimo pokazati da neki limes **ne** postoji.

Primjer

Pokažimo da funkcija

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nema limes u $(0, 0)$.

Limes preko nizova

Primjer

Pokažimo da funkcija

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

nema limes u $(0,0)$.
Uzmimo dva niza točaka $\left(\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right), n\in\mathbb{N}\right)$ *i* $\left(\left(\frac{1}{n},0\right), n\in\mathbb{N}\right)$, *koji konvergiraju prema* $(0,0)$.

Limes preko nizova

Primjer

Pokažimo da funkcija

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nema limes u $(0,0)$.
Uzmimo dva niza točaka $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right)$ *i* $\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right), n \in \mathbb{N}\right)$*, koji konvergiraju prema* $(0,0)$.
No, za pripadajuće funkcijske vrijednosti imamo

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0, \quad f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 0}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0} = 1$$

Primjer

Pokažimo da funkcija

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nema limes u $(0,0)$.
Uzmimo dva niza točaka $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right)$ *i* $\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right), n \in \mathbb{N}\right)$, *koji konvergiraju prema* $(0,0)$.
No, za pripadajuće funkcijske vrijednosti imamo

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0, \quad f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 0}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0} = 1$$

Prema prethodnom teoremu, zaključujemo da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *ne postoji.*

Neprekidnost

Definicija

Neka je dana funkcija $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. *Kažemo da je funkcija* f **neprekidna u točki** $T \in D_f$ *ako je*

$$\lim_{T \to T_0} f(T) = f(T_0)$$

Ako je f *neprekidna u svakoj točki* $T \in A \subseteq D_f$ *kažemo da je* f **neprekidna na skupu** A, *a ako je* $A = D_f$ *kažemo da je* f **neprekidna funkcija**.

Primjer

Funkcija

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

je neprekidna. Jer je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=1=f(0,0).$$

Neprekidnost

Primjer

Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je neprekidna. Jer je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1 = f(0,0).$$

Napomena

Zbroj $f+g$, *razlika* $f-g$, *umnožak* $f \cdot g$ *i kvocijent* $\frac{f}{g}$ *(kad god je definiran) neprekidnih skalarnih funkcija* f *i* g *su neprekidne skalarne funkcije.*

Neprekidnost

Teorem

Neka je funkcija f neprekidna i neka je $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren (sadrži rub) i omeđen podskup domene D. Tada funkcija f na skupu A dostiže svoju najmanju i svoju najveću vrijednost u nekim točkama. Drugim riječima, postoje točke $T_1, T_2 \in A$ takve da je

$$T \in A \Rightarrow f(T_1) \leq f(T) \leq f(T_2),$$

odnosno

$$f(T_1) = \min_{T \in A} f(T), \qquad f(T_2) = \max_{T \in A} f(T).$$

Neprekidnost

Teorem

Neka je funkcija f neprekidna i neka je $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren (sadrži rub) i omeđen podskup domene D. Tada funkcija f na skupu A dostiže svoju najmanju i svoju najveću vrijednost u nekim točkama. Drugim riječima, postoje točke $T_1, T_2 \in A$ takve da je

$$T \in A \Rightarrow f(T_1) \leq f(T) \leq f(T_2),$$

odnosno

$$f(T_1) = \min_{T \in A} f(T), \qquad f(T_2) = \max_{T \in A} f(T).$$

Primjer

Ako je $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ središnji krug radijusa a, svaka neprekidna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ ima minimalnu i maksimalnu vrijednost.

Neprekidnost

Teorem

Neka je funkcija f neprekidna i neka je $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren (sadrži rub) i omeđen podskup domene D. Tada funkcija f na skupu A dostiže svoju najmanju i svoju najveću vrijednost u nekim točkama. Drugim riječima, postoje točke $T_1, T_2 \in A$ takve da je

$$T \in A \Rightarrow f(T_1) \leq f(T) \leq f(T_2),$$

odnosno

$$f(T_1) = \min_{T \in A} f(T), \qquad f(T_2) = \max_{T \in A} f(T).$$

Primjer

Ako je $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ središnji krug radijusa a, svaka neprekidna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ ima minimalnu i maksimalnu vrijednost. Npr. $f(x, y) = x$ ima najmanju vrijednost $-a$ u točki $(-a, 0)$, a najveću a u točki $(a, 0)$.